Beschränktheitseigenschaften der Drei-Punkt-Funktion

Dissertation

Zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen

Fakultät der Georg-August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Jürgen Steppeler

aus Fredeburg

Institut für Theoretische Physik

Göttingen 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534919_0041

Beschränktheitseigenschaften der Drei-Punkt-Funktion

Dissertation

Zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen

Fakultät der Georg-August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Jürgen Steppeler

aus Fredeburg

Institut für Theoretische Physik

Göttingen 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Prof. Dr. H. J. Borchers
Korreferent: Prof. Dr. H. Reeh

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Februar 1973

Zusammenfassung

In der Wightman'schen Feldtheorie wird die Funktion $F_1(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(g^*_{-\underline{X}_1})A(\underline{f}^*)A(\underline{f})A(g_{\underline{X}_3})\Omega)$ betrachtet. $F_1(\underline{X}_1,\underline{X}_3)$ kann man als Randwert der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ komplexer Variablen darstellen. Es wird das maximale Gebiet untersucht, für welches man die Beschränktheit von $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ beweisen kann. Es ergibt sich, daß nicht alle reellen Punkte in diesem Gebiet enthalten sind.

Benutzte Bezeichnungen:

	Seite
A_{μ}^{ε}	15
A^{ε}	39
B_{ν}^{ε}	32
$F_1(\underline{X}_1, \underline{X}_3)$	2
$F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$	2
$F_\nu(\underline{X}_1, \underline{X}_3)$	28
$F_\nu(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$	29
$\underline{Z}_2$	29
Z_ν, Z_ν'	8
H(A) = Holomorphiehülle von A	
K(A) = linear-konvexe Hülle von A	
M_1, M_2	6
$M_1^{\varepsilon}, M_2^{\varepsilon}$	17
M_ε	25
$A \divideontimes B : (X - Y)^2 < 0 \quad \forall_{x \in A, y \in B}$	
$\xi_\nu, \xi_\nu', \eta_\nu, \eta_\nu'$	1o
$\underline{\xi}, \underline{\eta}$	16
$Q_{\nu\mu}^{\varepsilon}$	37
$U(\underline{Z})$	2

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I Einleitung	1
II Beschränktheitseigenschaften der Funktion $F_1(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$	6
1) Beschränktheitseigenschaften, die sich aus Lokalität und Positivität der Wightman-Funktionen ergeben	6
2) Einführung geeigneter Koordinaten und Bestimmung eines größeren Beschränktheitsgebietes	8
3) Bestimmung der Holomorphiehülle der Menge der bisher bekannten Beschränktheitspunkte	13
4) Anschauliche Darstellung des gewonnenen Beschränktheitsgebietes	17
5) Untersuchung der Konsistenz des gewonnenen Beschränktheitsgebietes mit der Positivität der Wightman-Funktionen	25
III Anwendung der Lokalität zur Gewinnung weiterer Holomorphie- und Beschränktheitspunkte	28
1) Weitere holomorphe Punkte der Funktion $F_1(\underline{z}_1, \underline{z}_3)$	28
2) Die Beschränktheitsgebiete der Funktionen $F_\nu(\underline{z}_1, \underline{z}_3)$	31
3) Die paarweise Abschließung der Mengen B_ν^ε	34
4) Zur Bestimmung von $H(Q_{13}^\varepsilon \cup Q_{12}^\varepsilon \cup Q_{23}^\varepsilon)$	38
IV Literaturverzeichnis	44

I Einleitung

In der Wightman'schen Feldtheorie[1o)] spielt die Untersuchung der Vakuumerwartungswerte

$$(1) \qquad W_n(\underline{X}_1,\cdots,\underline{X}_n) = (\Omega, A(\underline{X}_1)\cdots A(\underline{X}_n)\Omega)$$

der Feldoperatoren eine große Rolle. $A(X)$ $X \in R^4$ ist dabei als operatorwertige Distribution aufzufassen.

Aus den Wightman-Axiomen[1o)] folgt, daß sich die Funktionen $W_n(\underline{X}_1,\cdots,\underline{X}_n)$ zu Funktionen $W_n(\underline{Z}_1,\cdots,\underline{Z}_n)$ der komplexen Vierervariablen $\underline{Z}_\nu$ erweitern lassen, welche in gewissen Gebieten Q_n holomorph sind.

Es entsteht hier die Frage nach den Holomorphiehüllen der Gebiete Q_n[1,2,3,4)]. Diese Frage wurde bisher für n=2 und n=3 gelöst. Für höhere n ergeben sich beträchtliche Schwierigkeiten, die größtenteils noch ungelöst sind.

In dieser Arbeit stellen wir uns das Problem, ein maximales Gebiet zu finden, in welchem aus den Wightman-Axiomen die Beschränktheit der Funktion $W_n(\underline{Z}_1,\cdots,\underline{Z}_n)$ folgt. Wir beschränken uns dabei auf den Fall n=3.

Dabei benutzen wir einen etwas abgeänderten Begriff der Drei-Punkt-Funktion. Wir gehen aus von dem Operator $A(\underline{f})$, wobei $\underline{f}$ ein Element der in [9)] eingeführten Algebra ist. $\underline{f}$ ist also eine abbrechende Folge $(f_o, f_1, f_2, \cdots)$, wobei $f_\nu \in S_{4\nu}$ sein soll, $S_{4\nu}$ ist der Schwartz'sche Testfunktionenraum über

dem R^{4} [11]. Wir setzen voraus, daß alle f_ν einen kompakten Träger haben. Es gelte etwa:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\text{Träger } f_\nu(\underline{X}_1,\cdots,\underline{X}_n)\subset K\times K\times \cdots \times K,\\ &\text{Träger } g_\nu(\underline{X}_1,\cdots,\underline{X}_n)\subset K\times K\times\cdots\times K \end{aligned},$$

wobei $K\subset R^4$ eine Kugel ist.

Wir untersuchen die Funktion:

$$(3)\quad F_1(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(g^*_{-\underline{X}_1})A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\,A(g_{\underline{X}_3})\Omega)$$

Die Funktion $F_1(\underline{X}_1,\underline{X}_3)$ ist Randwert einer komplexen Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$. Um eine einfache Darstellung dieser Funktion zu erhalten, benutzen wir die Darstellung $U(\underline{X})$ der Translationsgruppe [10]. Gemäß [11] können wir aufgrund der Spektrumsbedingung für $\underline{Z}\in C^4$, $\mathrm{Im}\,\underline{Z}\in \bar{V}^+$ einen Operator $U(\underline{Z})$ definieren, der für relle $\underline{Z}$ mit $U(\underline{X})$ übereinstimmt. Dabei ist V^+ der Vorwärtslichtkegel. In [11] wird für $U(\underline{Z})$ folgende Eigenschaft abgeleitet:

$$(4)\quad \|U(\underline{Z})\| \leqslant 1 \qquad \underline{Z}\in R^4+iV^+$$

$\|U(\underline{Z})\|$ bedeutet dabei die Operatornorm von $U(Z)$.

Für $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ haben wir damit folgende Darstellung:

$$(5)\quad F_1(\bar{\underline{Z}}_1,\underline{Z}_3) = (U(-\underline{Z}_1)A(g)\Omega, A(\underline{f}^*)A(\underline{f})U(\underline{Z}_3)A(g)\Omega)$$

Aus [6] geht hervor, daß Ausdrücke der Gestalt $A(\underline{f})U(\underline{Z})A(\underline{g})\int$ definiert sind. Aus Gleichung (5) ergibt sich, daß $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ in folgender Menge C_1 analytisch ist:

$$(6) \qquad C_1 = \{(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3) \mid \mathrm{Im}\underline{Z}_1 \in V^+,\ \mathrm{Im}\underline{Z}_3 \in V^+\}$$

Wir untersuchen hier die Beschränktheitseigenschaften der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_2)$. Innerhalb des reellen Bereiches $\mathrm{Im}\underline{Z}_1 = \mathrm{Im}\underline{Z}_3 = 0$ ist z.B. in [5,7] ein Gebiet angegeben, wo die Funktion $F_1(\underline{X}_1,\underline{X}_3)$ beschränkt ist.

BORCHERS[8] hat auch für bestimmte nicht-reelle Argumente die Beschränktheit der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ bewiesen.

In Kapitel II wird die maximale Ausdehnung dieses Beschränktheitsgebietes untersucht, indem von dem Ausgangsgebiet, auf dem die Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ beschränkt ist, die Holomorphiehülle bestimmt wird.

Bekanntlich kann man weitere analytische Punkte der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ finden, indem man in der Definition (3) die Operatoren permutiert, und die so entstehenden Funktionen betrachtet. Von dem so gewonnenen Gebiet bildet man die Holomorphiehülle[1,2,3] und erhält dann ein maximales Gebiet, wo die Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ holomorph ist.

Durch Betrachtung dieser permutierten Funktionen, ergeben sich auch neue Beschränktheitspunkte, die in Kapitel III

untersucht werden. Es ist die Holomorphiehülle der Menge aller Beschränktheitspunkte zu betrachten. Insbesondere wird untersucht, ob sich auf diese Weise in dem Gebiet C_1 neue Beschränktheitspunkte ergeben.

Diese Untersuchungen wurden durch die Frage motiviert, ob man durch Betrachtung der komplexen Wightman-Funktionen die Beschränktheit der Funktion

$$\|A(\underline{f})A(\underline{g}_{\underline{a}})\Omega\| \tag{7}$$

auch für zeitartige Argumente $\underline{a}$ folgern kann. Wäre diese Funktion für alle $\underline{a} \in R^4$ beschränkt, so ergäbe sich eine Aussage darüber, ob Ausdrücke der Gestalt

$$A(f)E(\Delta)A(g)\Omega \tag{8}$$

defininiert sind[12]. Dabei soll $E(\Delta)$ zur Spektralzerlegung[11] von $U(\underline{a})$ gehören. Die hier gegebene Antwort ist jedoch negativ. Es wird gezeigt, daß durch den Prozess der analytischen Abschließung keine neuen reellen Punkte gewonnen werden können.

Zur Vereinfachung führen wir für das Folgende eine zweidimensionale Raum-Zeit-Welt ein, indem wir setzen:

$$\underline{X}_\nu = \begin{pmatrix} X^0_\nu \\ X^1_\nu \underline{v} \end{pmatrix} \qquad \underline{Z}_\nu = \begin{pmatrix} Z^0_\nu \\ Z^1_\nu \underline{v} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Dabei ist $\underline{v} \in R^3$ ein fester Einheitsvektor.

Bei [2] bedeutet diese Beschränkung auf den zwei-dimensionalen Fall keine Einschränkung, weil die Drei-Punkt-Funktion Lorentz-invariant ist[13]. Da wir jedoch die allgemeinere Definition (5) verwenden, dürfen wir die Lorentz-Invarianz der Funktion $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ nicht benutzen. Der im folgenden geführte Gegenbeweis hat daher nur eingeschränkte Gültigkeit.

II Beschränktheitseigenschaften der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_2)$

1) Beschränktheitseigenschaften, die sich aus Lokalität und Positivität der Wightman-Funktionen ergeben

Durch Ausnutzung der Positivität und der Lokalität erhalten wir den

Hilfssatz 1

Es gibt eine Konstante $C>0$, so daß

$$|F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)|\leqslant C \quad \text{gilt,} \tag{10}$$

wenn

$$\mathrm{Im}\underline{Z}_1 = 0 \qquad \mathrm{Re}\underline{Z}_1 \in M \qquad \mathrm{Im}\underline{Z}_3 \in V^+ \tag{11}$$

oder

$$\mathrm{Im}\underline{Z}_1 \in V^+ \qquad \mathrm{Im}\underline{Z}_3 = 0 \qquad \mathrm{Re}\underline{Z}_3 \in M \tag{12}$$

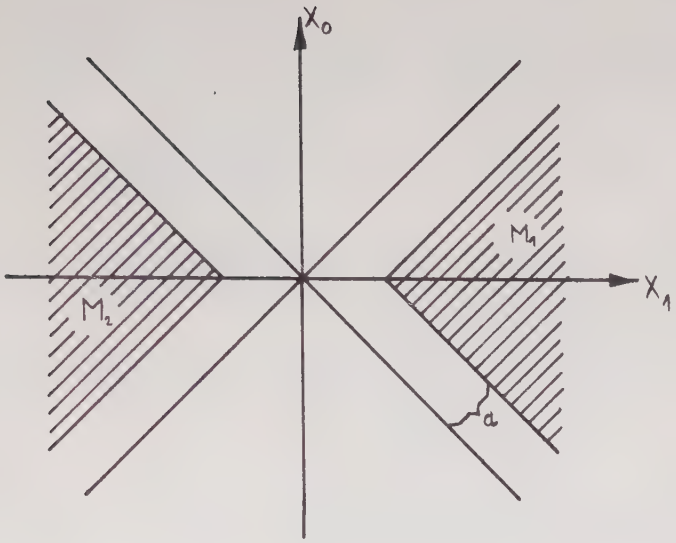
Dabei ist $M \subset R^2$ folgende Menge:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \in R^2 \mid K + \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \underline{v} \end{pmatrix} \not\asymp K \right\} \tag{13}$$

K ist die in Gleichung (2) definierte Kugel. In einer zwei-dimensionalen Raum-Zeit-Welt gilt insbesondere:

$$M = M_1 \cup M_2, \tag{14}$$

wobei die Definition von M_1, M_2 der Figur 1 zu entnehmen ist.



Figur 1

Beweis von Hilfssatz 1:

Es liege etwa der Fall (11) vor. Dann gilt nach Gleichung (5), (4):

$$(15)\quad |F_1(\underline{z}_1,\underline{z}_3)| = |(A(g_{-\underline{z}_1})\Omega, A(\underline{f}^*)A(\underline{f})U(\underline{z}_3)A(g)\Omega)|$$

$$\leq \|A(\underline{f}^*)A(\underline{f})A(g_{-\underline{z}_1})\Omega\| \quad \|U(\underline{z}_3)A(g)\Omega\|$$

$$\leq \left(A(g^*_{-\underline{z}_1})A(g_{-\underline{z}_1})\Omega, \left(A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\right)^2\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \|U(\underline{z}_3)\| \quad \|A(g)\Omega\|$$

$$\leq \|A(g)\Omega\| \left(\|A(g_{-\underline{z}_1})A(g_{-\underline{z}_1})\Omega\| \; \|(A(\underline{f}^*)A(\underline{f}))^2\Omega\| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|A(g)\Omega\| \, \|A(g^*)A(g)\Omega\|^{\frac{1}{2}} \, \|(A(\underline{f}^*)A(\underline{f}))^2\Omega\|^{\frac{1}{2}}$$

Bei diesen Abschätzungen wurde die Schwartz'sche Ungleichung und die Lokalität ausgenutzt.

Im Fall der Gleichung (12) kann man analog argumentieren.

2) Einführung geeigneter Koordinaten und Bestimmung eines größeren Beschränktheitsgebietes

In der zwei-dimensionalen Welt ist es üblich, Lichtkegelkoordinaten einzuführen. Diese haben sich schon in [2] bewährt.

Wir definieren:

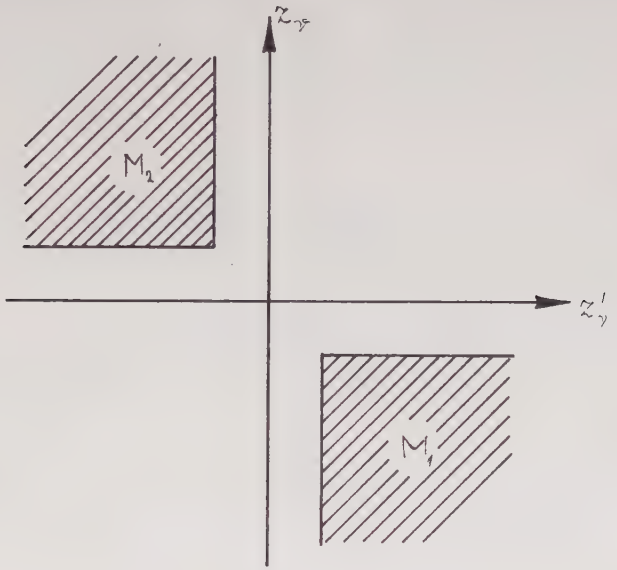
(16)
$$\zeta_\nu = \begin{pmatrix} z_\nu \\ z'_\nu \end{pmatrix}$$

$$z_\nu = z^0_\nu - z^1_\nu$$

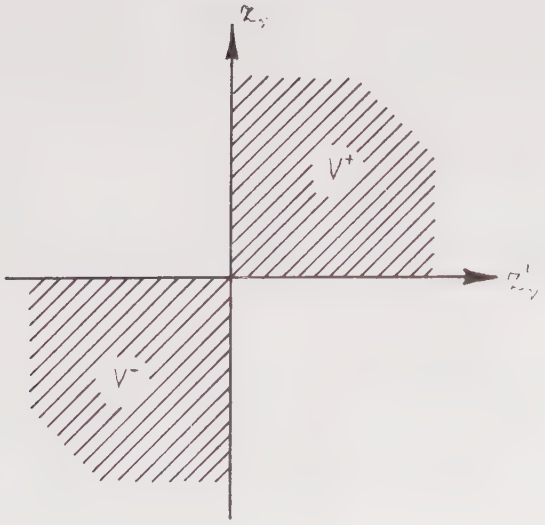
$$z'_\nu = z^0_\nu + z^1_\nu$$

$$\nu \in \{1,3\}$$

Setzen wir $\mathrm{Im}Z_\nu = \mathrm{Im}\, Z'_\nu = 0$, so ergibt sich für die Mengen M und V^+ folgendes Bild :



Figur 2



Figur 3

Wir führen noch die Variablen ξ_ν, η_ν und ξ'_ν, η'_ν ein:

$$(17) \qquad Z_1 = -a + e^{\xi_1 + i\eta_1} \qquad Z_3 = +a + e^{\xi_3 + i\eta_3}$$

$$Z'_1 = +a + e^{\xi'_1 + i\eta'_1} \qquad Z'_3 = -a + e^{\xi'_3 + i\eta'_3}$$

Die Definition von a ist Figur 1 zu entnehmen.

Mit diesen Koordinaten kann man eine offene Menge des C^4 beschreiben, wo $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ beschränkt ist :

Hilfssatz 2

Es gilt:

$$(18) \qquad |F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)| \leq C \text{ für}$$

$$\eta_1 \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi) \quad \eta'_1 \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \quad \eta_3 \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \quad \eta'_3 \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi)$$

Beweis:

Ersetzen wir in Hilfssatz 1 die Menge M durch die Untermenge M_1, so ergibt sich in den neuen Koordinaten folgende Aussage :

$F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ ist beschränkt in folgender Menge:

$$(19) \qquad \eta_1 = \pi \quad \eta'_1 = 0 \quad \eta_3 \in (0, \pi) \quad \eta'_3 \in (0, \pi)$$

(2o) $\eta_1 \in (0,\pi) \quad \eta_1' \in (0,\pi) \quad \eta_3 = 0 \quad \eta_3' = \pi$

Dabei bezeichnet $(0,\pi)$ das offene Intervall zwischen 0 und π.

Weiterhin gilt:

Im Falle der Gleichung (19) ist $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ eine holomorphe Funktion der Variablen $\xi_3+i\eta_3$, $\xi_3'+i\eta_3'$.

Im Falle der Gleichung(2o) ist $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ eine holomorphe Funktion der Variablen $\xi_1+i\eta_1$, $\xi_1'+i\eta_1'$.

Der Randwert für $\eta_3 \to \pi$, $\eta_3' \to 0$ bzw. $\eta_1 \to \pi$, $\eta_1' \to 0$ existiert und ist in beiden Fällen dieselbe stetige, beschränkte Funktion von $\xi_1, \xi_1', \xi_3, \xi_3'$.

Die durch die Gleichungen (19) und (20) beschriebene Menge ist eine entartete Tube. Es sind jedoch die Voraussetzungen von [6] Lemma 7 erfüllt. Daher sind wir berechtigt, den Tubensatz anzuwenden. Daraus folgt die Behauptung.

Indem wir eine andere Konstante verwenden, können wir das Beschränktheitsgebiet von Hilfssatz 2 noch weiter vergrößern:

Hilfssatz 3

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon > 0$, so daß gilt:

$$|F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)| \leq C_\varepsilon$$

für:

(21) $\eta_1 \in (\varepsilon, \pi)$, $\eta_1' \in (0, \pi-\varepsilon)$, $\eta_3 \in (0, \pi-\varepsilon)$, $\eta_3' \in (\varepsilon, \pi)$

Beweis:

Weil in der Definition (5) von $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ $\underline{f}$ beliebig sein darf, folgt aus Hilfssatz 2:

(22) $\| A(\underline{f}^*)A(\underline{f})U(\underline{Z}_3)A(\underline{g})\,\Omega \| \leq c'$

wenn: $\eta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\eta_3' \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Wir benutzen die Abschätzung:

(23) $|F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)| \leq \|A(\underline{g})\Omega\| \; \|A(\underline{f}^*)A(\underline{f})U(\underline{Z}_3)A(\underline{g})\Omega\|$

Wegen der Gleichung (22),(23) ist $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ auf der folgenden Menge beschränkt:

(24) $\eta_1 \in (0, \pi)$, $\eta_1' \in (0, \pi)$, $\eta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\eta_3' \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Auf analoge Weise sieht man, daß $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ auch auf folgender Menge beschränkt ist:

(25) $\eta_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\eta_1' \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\eta_3 \in (0, \pi)$, $\eta_3' \in (0, \pi)$

Auf die Gleichung (24) und (25) kann man wieder Lemma 7

von [6] anwenden, um in Gleichung (18) die Intervalle für die η_ν , η_ν' zu vergrößern. Indem man dieses Verfahren genügend oft wiederholt, gelangt man schließlich zu der Behauptung.

Von der Menge M_2 ausgehend erhalten wir auf analoge Weise ein weiteres Beschränktheitsgebiet.

Man erhält:

Hilfssatz 4

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon > 0$, so daß gilt:

$$(26)\quad |F_1(z_1 + 2a, z_1' - 2a, z_3 - 2a, z_3' + 2a)| \leq C_\varepsilon$$

für

$$\eta_1 \in (0, \pi-\varepsilon)\ ,\ \eta_1' \in (\varepsilon, \pi)\ ,\ \eta_3 \in (\varepsilon, \pi)\ ,\ \eta_3' \in (0, \pi-\varepsilon)$$

3) Bestimmung der Holomorphiehülle der Menge der bisher bekannten Beschränktheitspunkte

Um das Beschränktheitsgebiet zu finden, welches im Rahmen der bisherigen Betrachtungen maximal ist, müssen wir die Holomorphiehülle der Menge der bisher bekannten Beschränkt-

heitspunkte bilden. Um ein Bild von dieser Menge zu bekommen, setzen wir im folgenden:

(27) $$a = 0$$

Durch diese Festsetzung wird die gesuchte Menge höchstens vergrößert.

Mit Hilfe der Definitionsgleichung (5) können wir jetzt die Hilfssätze 3 und 4 folgenderweise zusammenfassen:

Hilfssatz 5

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante C_ε, so daß gilt:

(28) $$\| A(\underline{f}) U(\underline{z}_3) A(\underline{g}) \Omega \| \leq \sqrt{C_\varepsilon}$$

für

$$\eta_3 \in (\varepsilon, \pi) \ , \ \eta_3' \in (0, \pi - \varepsilon)$$

oder

$$\eta_3 \ (0, \pi - \varepsilon) \ , \ \eta_3' \in (\varepsilon, \pi)$$

Beweis:

Es gilt:

$$\| A(\underline{f}) U(\underline{z}_3) A(\underline{g}) \Omega \| = \sqrt{F_1(-\bar{\underline{z}}_3, \underline{z}_3)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung folgt die Behauptung aus den

Hilfssätzen 3 und 4.

Wir beachten, daß in der Definition (5) von $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ $\underline{f}$ beliebig sein darf. Dann erhalten wir aus Hilfssatz 5 und Gleichung (23) folgende Gebiete, in welchen $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ beschränkt ist:

$$(29)\quad A_1^{\varepsilon} \ni \eta_1 \in (\varepsilon,\pi)\,,\ \eta_1' \in (0,\pi-\varepsilon)\,,\ \eta_3 \in (0,\pi)\,,\ \eta_3' \in (0,\pi)$$

$$(30)\quad A_2^{\varepsilon} \ni \eta_1 \in (0,\pi-\varepsilon)\,,\ \eta_1' \in (\varepsilon,\pi),\eta_3 \in (0,\pi)\,,\ \eta_3' \in (0,\pi)$$

$$(31)\quad A_3^{\varepsilon} \ni \eta_1 \in (0,\pi),\ \eta_1' \in (0,\pi)\,,\ \eta_3 \in (\varepsilon,\pi)\,,\ \eta_3' \in (0,\pi-\varepsilon)$$

$$(32)\quad A_4^{\varepsilon} \ni \eta_1 \in (0,\pi)\,,\ \eta_1' \in (0,\pi),\eta_3 \in (0,\pi-\varepsilon),\ \eta_3' \in (\varepsilon,\pi)$$

In Satz 1 wird die Holomorphichülle $H\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\right)$ bestimmt. In $H\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\right)$ hat $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ den gleichen Wertebereich, wie in dem ursprünglichen Gebiet $\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}$.

Satz 1

Es gilt:

$$(33)\qquad H\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\right) = K\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\right)$$

In diesem Bereich ist die Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ beschränkt.

Dabei ist $K\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\right)$ die linear-konvexe Hülle von $\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon$:

$$(34)\quad K\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\right) = \left\{ \underline{\xi} + i\underline{\eta} = \sum_{\nu=1}^{4} \lambda_\nu (\underline{\xi}_\nu + i\,\underline{\eta}_\nu) \;\middle|\; \underline{\xi}_\nu + i\underline{\eta}_\nu \in A_\nu^\varepsilon ,\ \sum_{\nu=1}^{4} \lambda_\nu = 1 \qquad \lambda_\nu \geq 0 \right\}$$

$\underline{\xi}_\nu + i\underline{\eta}_\nu$ ist der Vektor:

$$(35)\qquad \underline{\xi} + i\underline{\eta} = \begin{vmatrix} \xi_1 + i\eta_1 \\ \xi_1' + i\eta_1' \\ \xi_3 + i\eta_3 \\ \xi_3' + i\eta_3' \end{vmatrix}$$

Beweis von Satz 1:

Die Gleichungen (29) - (32) beschreiben eine offene, zusammenhängende Tube. Die Behauptung folgt aus dem Tubensatz [14,15].

Folgerung aus Satz 1:

$H\left(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\right)$ enthält keine reellen Punkte, die nicht schon in einer der Mengen A_ν^ε enthalten sind.

Wäre dies nämlich anders, so müßte eine der Mengen

$$\eta_1 = 0 \quad \eta_1' = 0 \quad \eta_3 = 0 \quad \eta_3' = 0$$

$$\eta_1 = 0 \quad \eta_1' = 0 \quad \eta_3 = \pi \quad \eta_3' = \pi$$

$$\eta_1 = \pi \qquad \eta_1' = \pi \qquad \eta_3 = 0 \qquad \eta_3' = 0$$

$$\eta_1 = \pi \qquad \eta_1' = \pi \qquad \eta_3 = \pi \qquad \eta_3' = \pi$$

in K ($\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon$) enthalten sein, was man leicht widerlegen kann.

4) Anschauliche Darstellung des gewonnenen Beschränktheitsgebietes

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, eine anschauliche Vorstellung von dem Beschränktheitsgebiet H ($\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon$) zu gewinnen.

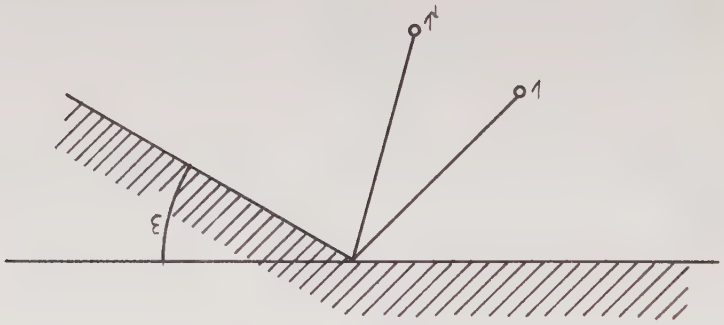
Wie RUELLE [2] stellen wir die Variable Z_ν durch einen Punkt ν in der komplexen Ebene dar, und die Variable durch den an der i-Achse gespiegelten Punkt ν'. Außerdem wollen wir die auftretenden Gebiete im C^4 als Vereinigung von topologischen Produkten aus Mengen des C^2 darstellen. Aus diesem Grunde definieren wir die folgenden Hilfsgebiete M_ν^ε des C^2 :

$$(36) \qquad M_1^\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} \mid \text{arc } Z \in (0, \pi-\varepsilon) \ , \ \text{arc } Z' \in (\varepsilon, \pi) \right\}$$

$$M_\lambda^\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} \mid \text{arc } Z \in (\varepsilon, \pi) \ , \ \text{arc } Z' \ (0, \pi-\varepsilon) \right\}$$

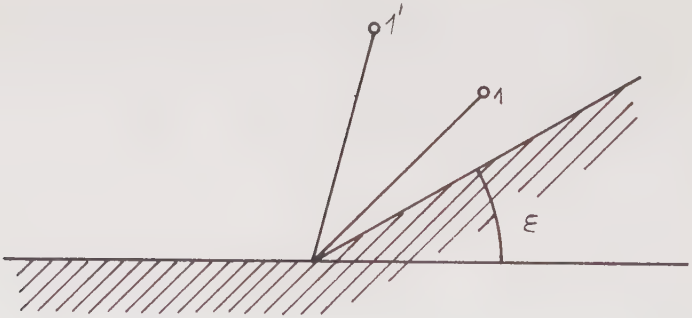
Die Mengen M_ν^ε besitzen folgende anschauliche Darstellung:

M_1^ε:



Figur 4

M_2^ε:



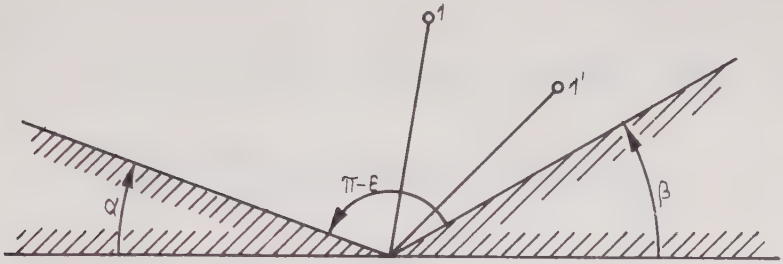
Figur 5

1 und 1' dürfen nicht in dem schraffierten Bereich liegen.

Zunächst untersuchen wir die anschauliche Darstellung von $H(M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon)$:

Hilfssatz 6

$H(M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon)$ besitzt folgende Darstellung:



Figur 6

1 und1' dürfen nicht in dem schraffierten Bereich liegen. Die Winkel α und β dürfen dabei beliebig ≥ 0 sein.

Die Gleichung für dieses Gebiet lautet:

$$(37) \quad H(M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon) = \{\varepsilon < \arg Z_1 Z_1' < 2\pi - \varepsilon,\ \mathrm{Im}Z_1, \mathrm{Im}Z_1' > 0\}$$

Beweis:

Die rechte Seite von Gleichung (37) ist ein Holomorphiegebiet. Deshalb ist nur noch zu zeigen:

$$H(M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon) \supset \{\varepsilon < \arg Z_1 Z_1' < 2\pi - \varepsilon,\ \mathrm{Im}Z_1,\ \mathrm{Im}Z_1' > 0\}$$

Sei nun:

$$\eta = \text{arc } Z \qquad \eta' = \text{arc } Z'$$

Nach dem Tubensatz gilt:

$$(38)\quad H(M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon) = K(\{\eta \in (\varepsilon,\pi),\ \eta' \in (0,\pi-\varepsilon)\} \cup \{\eta \in (0,\pi-\varepsilon),\ \eta' \in (\varepsilon,\pi)\})$$

Dabei wird durch K die Bildung der linear-konvexen Hülle bezeichnet.

Wenn

$$(39)\quad \eta, \eta' \in (\varepsilon,\pi-\varepsilon) \text{ gilt, so folgt:}$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} \in M_1^\varepsilon \cup M_1^\varepsilon$$

Sei nun $\begin{pmatrix} \eta_o \\ \eta_o' \end{pmatrix}$ Element der in (37) definierten Menge. Interessant ist nur der Fall, wo die Bedingung (39) verletzt ist. Es gelte etwa:

$$\eta_o < \varepsilon$$

Daraus folgt:

$$(4o)\quad \eta_o = \mu\varepsilon \qquad \text{mit } 0 < \mu < 1$$

Aus Figur 6 entnimmt man dann:

(41) $$\eta_o' > (1-\mu)\,\varepsilon$$

daraus folgt:

$$\eta_o' = (1-\mu)\,\varepsilon' \quad \text{mit } \varepsilon' > \varepsilon$$

Für $\begin{pmatrix}\eta_o\\ \eta_o'\end{pmatrix}$ erhalten wir damit folgende Darstellung:

(42) $$\begin{pmatrix}\eta_o\\ \eta_o'\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}\varepsilon\\ 0\end{pmatrix} + (1-\mu)\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon'\end{pmatrix}$$

Aus den Gleichungen (42) und (38) folgt:

(43) $$\begin{pmatrix}z_o\\ z_o'\end{pmatrix} \in \overline{H(M_1 \cup M_2)}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 7

Es gilt:

(44) $$H\left(M_\nu^\varepsilon \otimes M_\mu^0) \cup (M_\nu^0 \otimes M_\mu^\varepsilon\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon}} (M_\nu^{\varepsilon_1} \otimes M_\mu^{\varepsilon_2})$$

Beweis:

Wir benutzen die in Gleichung (17) eingeführten Variablen (hier gilt a = 0). Es sei etwa $\nu = 1$, $\mu = 2$. Dann folgt nach

dem Tubensatz:

$$(45)\qquad H\left[(M_1^{\varepsilon}\otimes M_2^{0})\cup(M_1^{0}\otimes M_2^{\varepsilon})\right] =$$

$$= \bigcup_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\geq 0\\ \lambda_1+\lambda_2=1}} \Big(\lambda_1\{\eta_1\in(0,\pi-\varepsilon),\eta_1'\in(\varepsilon,\pi),\eta_3\in(0,\pi),\eta_3'\in(0,\pi)\}+$$

$$+\lambda_2\{\eta_1,\eta_1'\in(0,\pi),\eta_3\in(\varepsilon,\pi),\eta_3'\in(0,\pi-\varepsilon)\}\Big)$$

$$= \bigcup_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\geq 0\\ \lambda_1+\lambda_2=1}} M_1^{\lambda_1\varepsilon}\otimes M_2^{\lambda_2\varepsilon}$$

Dies ist die Behauptung (44). Nach diesen Hilfsbetrachtungen kehren wir zurück zu unseren Ausgangsgebieten A_ν^{ε} (siehe Gleichung (29) - (32)).

Wir erhalten:

Hilfssatz 8

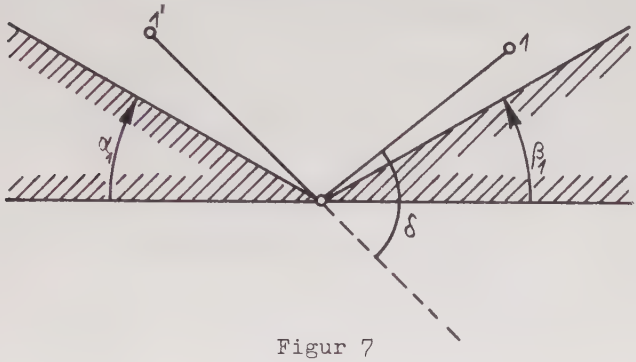
Es gilt:

$$(46)\qquad H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\Big) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\geq 0\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon}} H(M_1^{\varepsilon_1}\cup M_2^{\varepsilon_1})\otimes H(M_1^{\varepsilon_2}\cup M_2^{\varepsilon_2})$$

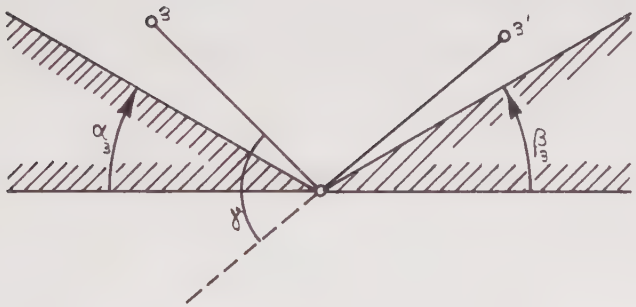
$$=\left\{Z_1,Z_1',Z_3,Z_3' \;\middle|\; -2\pi+\varepsilon<\arg -Z_1Z_1'\pm\arg -Z_3Z_3'<2\pi-\varepsilon,\ \mathrm{Im}Z_\nu,\mathrm{Im}Z_\nu'>0\right\}$$

In Gleichung (46) ist arc Z, $\sphericalangle \gamma, \gamma' \in (-\pi, \pi)$ zu wählen.

Durch Hilfssatz 6 und Hilfssatz 8 gewinnt man folgendes anschauliche Bild von $H(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon)$:



Figur 7



Figur 8

1 und 1' bzw. 3 und 3' dürfen nicht in dem schraffierten Bereich liegen. Es muß gelten: $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3 > 0$ und $|\gamma| + |\delta| > \varepsilon$

Beweis von Hilfssatz 8 :

Mit Hilfe der Mengen M_ν^ε gewinnen wir folgende Darstellung

für die Mengen A_ν^ε :

$$(47) \qquad A_1^\varepsilon = M_2^\varepsilon \otimes M_1^0 \qquad A_2^\varepsilon = M_1^\varepsilon \otimes M_1^0$$

$$A_3^\varepsilon = M_1^0 \otimes M_2^\varepsilon \qquad A_4^\varepsilon = M_1^0 \otimes M_1^\varepsilon$$

Die rechte Seite von Gleichung (46) ist ein Holomorphiegebiet, welches aufgrund der Gleichungen (47) die Mengen A_ν^ε umfaßt. Daher genügt es, zu zeigen:

$$(48) \qquad H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\Big) \supset \bigcup_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon}} H(M_1^{\varepsilon_1} \cup M_2^{\varepsilon_1}) \otimes H(M_1^{\varepsilon_2} \cup M_2^{\varepsilon_2})$$

Wir betrachten die Gleichung $M_1^0 = M_2^0$ und bilden den paarweisen Abschluß der Mengen A_ν^ε . Mit Hilfe der Gleichungen (47) und Hilfssatz 7 ergibt sich dann:

$$(49) \qquad H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\Big) \supset (M_1^{\varepsilon_1} \otimes M_1^{\varepsilon_2}) \cup (M_1^{\varepsilon_1} \otimes M_2^{\varepsilon_2}) \cup$$

$$\cup (M_2^{\varepsilon_1} \otimes M_1^{\varepsilon_2}) \cup (M_2^{\varepsilon_1} \otimes M_2^{\varepsilon_2})$$

Daraus folgt:

$$(50) \qquad H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\Big) \supset H(M_1^{\varepsilon_1} \cup M_2^{\varepsilon_1}) \otimes M_1^{\varepsilon_2} \cup H(M_1^{\varepsilon_1} \cup M_2^{\varepsilon_1}) \otimes M_2^{\varepsilon_2} =$$

$$= H(M_1^{\varepsilon_1} \cup M_2^{\varepsilon_1}) \otimes (M_1^{\varepsilon_2} \cup M_2^{\varepsilon_2})$$

Aus Gleichung (5o) folgt die Behauptung (48).

5) Untersuchung der Konsistenz des gewonnenen Beschränktheitsgebietes mit der Positivität der Wightman-Funktionen

Durch Anwendung der Positivität der Wightman-Funktionen könnte man im Prinzip eine weitere Vergrößerung des vorhandenen Beschränktheitsgebietes erwarten. Zu diesem Zweck definieren wir die Menge M_ε :

$$(51)\quad M_\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} \mid (-\bar{Z}, -\bar{Z}', Z, Z') \in H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon \Big) \right\}$$

Das Beschränktheitsgebiet hat dann folgende Eigenschaft:

Hilfssatz 9

Es gilt:

$$(52)\qquad |F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)| \leq C_\varepsilon$$

für $\quad -\bar{Z}_1 \in M_\varepsilon \qquad \underline{Z}_3 \in M_\varepsilon$

Beweis:

Nach Gleichung (5) und Hilfssatz 4 folgt:

$$(53)\qquad \| A(\underline{f}) U((Z,Z')) A(g) \Omega \| \leq \sqrt{C_\varepsilon} \quad \text{für } (Z,Z') \in M_\varepsilon$$

Indem wir die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung auf (5) anwenden, erhalten wir:

$$(54)\quad |F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)| \leq \|A(\underline{f})U(-\bar{\underline{Z}}_1)A(\underline{g})\Omega\|\cdot\|A(\underline{f})U(\underline{Z}_3)A(\underline{g})\Omega\|$$

Aus den Gleichungen (53) und (54) folgt die Behauptung.

Der folgende Satz besagt jedoch, daß man durch Hilfssatz 9 keine neuen Beschränktheitspunkte erhält.

Satz 2

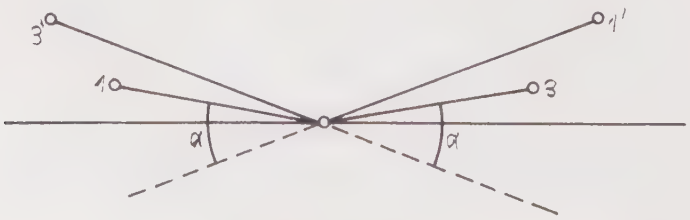
Es gilt:

$$(55)\qquad \{-\bar{\underline{Z}} \in M_\varepsilon\}\otimes M_\varepsilon \quad \subset \quad H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon\Big)$$

Beweis:

Die Operation $\underline{Z}\to -\bar{\underline{Z}}$ ist anschaulich die Spiegelung der einzelnen Komponenten von $\underline{Z}$ an der i-Achse.

Wenn in der Definitionsgleichung (51) $\underline{Z}_3$ die unabhängige Variable ist, so wird die Lage von $\underline{Z}_1$ durch Figur 9 dargestellt.



Figur 9

Der Figur 9 entnehmen wir:

$$|\sphericalangle 11'| = |\sphericalangle 33'| \quad \text{, wenn } -\bar{1}=3,\ -\bar{1}'=3'$$

In der obigen Gleichung soll $\sphericalangle \nu\nu' \in (-\pi,\pi)$ gelten.

Aus Hilfssatz 8 folgt dann:

$$|\sphericalangle 33'| < \pi - \frac{\varepsilon}{2}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe von Hilfssatz 6 :

$$M_\varepsilon = H(M_1^{\frac{\varepsilon}{2}} \cup M_2^{\frac{\varepsilon}{2}}) \tag{56}$$

Aus Gleichung (56) und Hilfssatz 8 folgt die Behauptung.

III Anwendung der Lokalität zur Gewinnung weiterer Holomorphie- und Beschränktheitspunkte

1) Weitere holomorphe Punkte der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$

Wie bei den Wightman-Funktionen ist es auch bei der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ möglich, weitere holomorphe Punkte zu gewinnen, indem man in der Definition (3) die Operatoren permutiert. Wir haben noch folgende Permutationen zu betrachten:

$$(57)\quad F_2(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(g_{\underline{X}_3})A(\underline{f}^*)A(\underline{f})A(g^*_{-\underline{X}_1})\Omega)$$

$$(58)\quad F_3(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(\underline{f}^*)A(\underline{f})A(g_{\underline{X}_3})A(g^*_{-\underline{X}_1})\Omega)$$

$$(59)\quad F_4(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(g^*_{-\underline{X}_1})A(g_{\underline{X}_3})A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega)$$

$$(60)\quad F_5(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(g_{\underline{X}_3})A(g^*_{-\underline{X}_1})A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega)$$

$$(61)\quad F_6(\underline{X}_1,\underline{X}_3) = (\Omega, A(\underline{f}^*)A(\underline{f})A(g^*_{-\underline{X}_1})A(g_{\underline{X}_3})\Omega)$$

Jede der Funktionen $F_\nu(\underline{X}_1,\underline{X}_3)$ ist Randwert der komplexen Funktion $F_\nu(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$, für die man mit Hilfe des Operators $U(\underline{Z})$ folgende Darstellungen findet:

(62) $F_2(\underline{z}_1,\underline{\bar{z}}_3) = (U(\underline{z}_3)A(g^*)\Omega, A(\underline{f}\ )A(\underline{f})U(-\underline{z}_1)A(g^*)\Omega)$

(63) $F_3(\underline{z}_1,\underline{z}_3) = (A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega, U(\underline{z}_3)A(g)U(-\underline{z}_1-\underline{z}_3)A(g^*)\Omega)$

(64) $F_4(\underline{z}_1,\underline{z}_3) = (A(g)\Omega, U(\underline{z}_1+\underline{z}_3)A(g)U(-\underline{z}_3)A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega)$

(65) $F_5(\underline{z}_1,\underline{z}_3) = (A(g^*)\Omega, U(-\underline{z}_1-\underline{z}_3)A(g^*)U(\underline{z}_1)A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega)$

(66) $F_6(\underline{z}_1,\underline{z}_3) = (A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega, U(-\underline{z}_1)A(g^*)U(\underline{z}_3+\underline{z}_1)A(g)\Omega)$

Um die Definitionsbereiche der Funktionen $F_\nu(\underline{z}_1,\underline{z}_3)$ zu beschreiben, führen wir mit RUELLE[2] die Koordinate $\underline{z}_2$ ein:

(67) $$\underline{z}_2 = -\underline{z}_1-\underline{z}_3$$

Man erhält dann folgende Definitionsbereiche C_ν für die Funktionen $F_\nu(\underline{z}_1,\underline{z}_3)$:

(68) $$C_2 : \underline{z}_1,\underline{z}_3 \in R^2-iV^+$$

(69) $$C_3 : \underline{z}_3,\underline{z}_1 \in R^2+iV^+$$

(7o) $$C_4 : \underline{z}_3,\underline{z}_1 \in R^2-iV^+$$

(71) $$C_5 : \underline{Z}_1, \underline{Z}_2 \in R^2 + iV^+$$

(72) $$C_6 : \underline{Z}_1, \underline{Z}_2 \in R^2 - iV^+$$

Ähnlich, wie bei den Wightman-Funktionen W_n[17] ist es möglich, von den Funktionen $F_\nu(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ jede als analytische Fortsetzung einer beliebigen anderen Funktion $F_\mu(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ aufzufassen. Es ergibt sich also, daß die Funktion $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ eine analytische Fortsetzung von dem Gebiet C_1 in das Gebiet

(73) $$G = \bigcup_{\nu=1}^{6} C_\nu$$

besitzt.

Um dies einzusehen, müssen wir zeigen, daß $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ sich in eine Umgebung der vollständig raumartigen Punkte fortsetzen läßt.

Die Menge O der vollständig raumartigen Punkte ist dabei folgendermaßen definiert:

(74) $$O = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{pmatrix} \in R^4 \mid K - \underline{X}_1 \times\!\!\!\times K,\quad K - \underline{X}_1 \times\!\!\!\times K + \underline{X}_3,\quad K + \underline{X}_3 \times\!\!\!\times K \right\}$$

Dabei ist K die durch Gleichung (2) definierte Kugel. Mit dieser Definition ergibt sich:

Hilfssatz 1o

Es gibt eine Umgebung U von O, so daß $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)$ eine

analytische Fortsetzung nach $C_1 \cup U$ besitzt.

Beweis:

Wir betrachten neben $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_2)$ die Funktion $F_2(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$, welche das Analytizitätsgebiet $C_2 = -C_1$ hat.

Außerdem gilt wegen der Lokalität der Feldoperatoren für $Im\underline{Z}_1 = Im\underline{Z}_3 = 0$:

$$F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3) = F_2(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3) \tag{75}$$

Daher folgt die Behauptung aus dem Edge of the Wedge Theorem[10].

Die Holomorphiehülle von G wurde in [1,2] untersucht. Hier untersuchen wir nur, welchen Einfluß die Erweiterung der Funktion $F_1(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ auf die Beschränktheitseigenschaften in dem ursprünglichen Gebiet C_1 hat.

2) Die Beschränktheitsgebiete der Funktionen $F_\nu(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$

Wir bestimmen nun die Mengen B_ν^ε, auf denen die Funktionen $F_\nu(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$ beschränkt sind. Dazu benötigen wir außer (62) - (66) noch andere Darstellungen für die Funktionen $F_\nu(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3)$.

$$F_2(\underline{Z}_1,\overline{\underline{Z}}_3) = (A(\underline{f}^*)A(\underline{f})U(\underline{Z}_3)A(\underline{g}^*)\Omega, U(-\underline{Z}_1)A(\underline{g}^*)\Omega) \tag{76}$$

(77) $F_3(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3) = (A(\underline{g}^*)U(-\bar{\underline{Z}}_3)A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega, U(-\underline{Z}_1-\underline{Z}_3)A(\underline{g}^*)\Omega)$

(78) $F_4(\bar{\underline{Z}}_1,\underline{Z}_3) = (A(\underline{g}^*)U(-\bar{\underline{Z}}_1-\bar{\underline{Z}}_3)A(\underline{g})\Omega, U(-\underline{Z}_3)A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega)$

(79) $F_5(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3) = (A(\underline{g})U(\bar{\underline{Z}}_3+\bar{\underline{Z}}_1)A(\underline{g}^*)\Omega, U(\underline{Z}_1)A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega)$

(80) $F_6(\underline{Z}_1,\underline{Z}_3) = (A(\underline{g})U(\underline{Z}_1)A(\underline{f}^*)A(\underline{f})\Omega, U(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)A(\underline{g})\Omega)$

Wir wenden auf die Gleichungen (62) - (66) und (76) - (80) die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung an und benutzen Gleichung (4). Außerdem verwenden wir Hilfssatz 5, worin wir $\underline{f}$ und $\underline{g}$ auf geeignete Weise abgeändert haben.

Auf diese Weise erhalten wir folgende Beschränktheitsgebiete:

(81) $B_1^\varepsilon = \bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon = \{ +\underline{Z}_1 \in M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon \ , \ +\underline{Z}_3 \in R^2+iV^+$

oder $\quad -\underline{Z}_1 \in R^2+iV^+ \ , \ +\underline{Z}_3 \in M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon \}$

(82) $B_2^\varepsilon = \{ -\underline{Z}_1 \in M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon \ , \ -\underline{Z}_3 \in R^2+iV^+$

oder $\quad -\underline{Z}_1 \in R^2+iV^+ \ , \ -\underline{Z}_3 \in M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon \}$

$$(83)\quad B_3^{\varepsilon} = \{\ \underline{z}_2 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ ,\ \underline{z}_3 \in R^2+iV^+$$

$$\text{oder}\quad \underline{z}_2 \in R^2+iV^+\ ,\ \underline{z}_3 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ \}$$

$$(84)\quad B_4^{\varepsilon} = \{\ -\underline{z}_2 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ ,\ -\underline{z}_3 \in R^2+iV^+$$

$$\text{oder}\quad -\underline{z}_2 \in R^2+iV^+\ ,\ -\underline{z}_3 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ \}$$

$$(85)\quad B_5^{\varepsilon} = \{\ \underline{z}_2 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ ,\ \underline{z}_1 \in R^2+iV^+$$

$$\text{oder}\quad \underline{z}_2 \in R^2+iV^+\ ,\ \underline{z}_1 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ \}$$

$$(86)\quad B_6^{\varepsilon} = \{\ -\underline{z}_2 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ ,\ -\underline{z}_1 \in R^2+iV^+$$

$$\text{oder}\quad -\underline{z}_2 \in R^2+iV^+\ ,\ -\underline{z}_1 \in M_1^{\varepsilon} \cup M_2^{\varepsilon}\ \}$$

$H(B_1^{\varepsilon})$ wurde in Hilfssatz 8 bestimmt und anschaulich dargestellt. Hilfssatz 8 leistet jedoch das gleiche auch für $H(B_\nu^{\varepsilon})$, weil diese Probleme durch Koordinatentransformation ineinander übergehen:

(87) $$H(B_2^{\varepsilon}) = -H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\Big)$$

(88) $$H(B_3^{\varepsilon}) = \Big\{\begin{pmatrix}\underline{z}_3\\ \underline{z}_2\end{pmatrix} \in H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\Big)\Big\}$$

(89) $$H(B_4^{\varepsilon}) = \Big\{\begin{pmatrix}\underline{z}_3\\ \underline{z}_2\end{pmatrix} \in -H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\Big)\Big\}$$

(90) $$H(B_5^{\varepsilon}) = \Big\{\begin{pmatrix}\underline{z}_1\\ \underline{z}_2\end{pmatrix} \in H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\Big)\Big\}$$

(91) $$H(B_6^{\varepsilon}) = \Big\{\begin{pmatrix}\underline{z}_1\\ \underline{z}_2\end{pmatrix} \in -H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}\Big)\Big\}$$

3) Die paarweise Abschließung der Mengen B_ν^{ε}

Den Gleichungen (87) - (91) entnimmt man, daß die Mengen B_ν^{ε} paarweise durch die gleichen Koordinaten beschrieben werden. Dies ermöglicht es, $H(B_\nu^{\varepsilon} \cup B_{\nu+1}^{\varepsilon})$ für $\nu \in \{1,3,5\}$ zu bestimmen. Dabei genügt es, $H(B_1^{\varepsilon} \cup B_2^{\varepsilon})$ zu untersuchen.

Wir erhalten folgendes Ergebnis:

Hilfssatz 11

Es gilt:

(92) $$H(B_1^{\varepsilon} \cup B_2^{\varepsilon}) = \bigcup_{\Lambda \in L} \Lambda \otimes \Lambda\, H(B_1^{\varepsilon})$$

Dabei ist L die Menge der komplexen Lorentz-Transformationen.

Beweis:

Mit den in Gleichung (17) eingeführten Koordinaten ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (29) - (32) für $B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon$ folgende Darstellung:

$$(93) \qquad B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon \quad : \xi + i\eta \in \bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon$$

oder

$$(94) \qquad \xi + i\eta \in \bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon + i \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen (93) und (94) beschreiben eine Tube, welche jedoch nicht zusammenhängend ist. Wir wollen erreichen, daß wenigstens die zugehörige abgeschlossene Tube zusammenhängend ist, und daß die Funktion an den Ausnahmepunkten, welche den Zusammenhang bewirken, stetig ist. Dies ist der Fall, wenn diese Ausnahmepunkte vollständig raumartige Punkte sind (s. Hilfssatz 1o). Um dies zu erreichen, führen wir eine Änderung des Koordinatenbereiches durch. Wir fassen die Gleichungen (93) und (94) folgenderweise zusammen:

$$(95) \qquad B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon \quad : \xi + i\eta \in \bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^\varepsilon + in \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ \pi \\ -\pi \end{pmatrix}$$

$$n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Gleichung (95) beschreibt eine nicht zusammenhängende Tube, deren Abschließung zusammenhängend ist.

Die Randpunkte $\underline{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} n$ sind jedoch total raumartige Punkte. Daher läßt sich $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ in diese Punkte hinein stetig fortsetzen. Nach Lemma 7 von [6] gibt es in den η-Variablen Umgebungen dieser Punkte, in welche $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ sich stetig fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung ist auch beschränkt. Auf diese Weise haben wir eine offene, zusammenhängende Tube erreicht.

Der Tubensatz ergibt dann:

$$(96) \qquad H(B_1^{\xi} \cup B_2^{\xi}) \supset \left\{ \underline{\xi} + i\underline{\eta} \in H\Big(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\xi} \Big) + i \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Wir können in Gleichung (96) nicht sofort die Gleichheit behaupten, weil die Transformation (17) nicht eineindeutig ist. Sei g die Transformation:

$$(97) \qquad g : \underline{\xi}, \underline{\eta} \rightarrow z_1, z_1', z_3, z_3'$$

V sei das Gebiet auf der rechten Seite von Gleichung (96) in den $\underline{\xi}, \underline{\eta}$-Variablen. Dann hat dieses Gebiet folgende Eigenschaften:

Wenn es zwei Punkte $P_1, P_2 \in V$ gibt mit der Eigenschaft :

$$g(P_1) = g(P_2), \text{ dann}$$

gibt es Umgebungen U_1 und U_2 von P_1 bzw. P_2 mit der Eigenschaft :

$$(98) \qquad P_1 \in U_1 \qquad P_2 \in U_2$$

$$g(U_1 \cap V) = g(U_2 \cap V)$$

Außerdem ist g auf U_1 und U_2 eineindeutig.

Es folgt also:

g(V) ist lokal Holomorphiegebiet.

Nach Satz 1 von [18] folgt:

g(V) ist Holomorphiegebiet.

Zusammen mit Gleichung (96) ergibt sich dann:

$$(99)\quad H(B_1^{\varepsilon} \cup B_2^{\varepsilon}) = \{ \underline{\xi} + i\underline{\eta} \in H(\bigcup_{\nu=1}^{4} A_\nu^{\varepsilon}) + i \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in R \}$$

Die Translation in den $\underline{\eta}$-Variablen bedeutet die Anwendung einer komplexen Lorentz-Transformation. Hilfssatz 11 ist also bewiesen.

In der durch Hilfssatz 8 gewonnenen Veranschaulichung bedeutet die Anwendung einer komplexen Lorentz-Transformation eine Rotation.

Fassen wir die Ergebnisse von Hilfssatz 8 und Hilfssatz 11 zusammen, so ergibt sich, daß $F_1(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ in der Vereinigung folgender drei Gebiete $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^{\varepsilon}$ beschränkt ist ($\nu, \mu \in \{1,2,3\}, \nu<\mu$):

$\mathcal{Q}_{\nu\mu}^{\varepsilon}$: ν, ν', μ, μ' liegen auf derselben Seite einer Geraden, und es gilt:

(1oo) $$|\pi - |\sphericalangle \nu\nu'|| + |\pi - |\sphericalangle \mu\mu'|| > \varepsilon$$

In Gleichung (1oo) soll $\sphericalangle \nu\nu' \in (-\pi, \pi\rangle$ gelten.

Nach diesem Schritt hat das Problem der Untersuchung der Holomorphiehülle große Ähnlichkeit mit dem von RUELLE[2] untersuchten Problem. Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich hier der von RUELLE untersuchte Fall. Für $\varepsilon \neq 0$ werden Winkelumgebungen vom 1-Schnitt und vom 2-Schnitt ausgeschlossen. Wie in Abschnitt 4 genauer gezeigt wird, hat dies zur Folge, daß die Betrachtung der Funktion $F_\nu(\underline{Z}_1, \underline{Z}_3)$ bezüglich des ursprünglichen Problems nicht weiterführt.

4) Zur Bestimmung von $H(\mathcal{Q}^{\varepsilon}_{13} \cup \mathcal{Q}^{\varepsilon}_{12} \cup \mathcal{Q}^{\varepsilon}_{23})$

Wir bestimmen nicht die genaue Gestalt von $H(\mathcal{Q}^{\varepsilon}_{13} \cup \mathcal{Q}^{\varepsilon}_{12} \cup \mathcal{Q}^{\varepsilon}_{23})$, sondern wir untersuchen nur, ob die neu gefundenen Beschränktheitspunkte einen Einfluß auf die Menge der Beschränktheitspunkte in dem ursprünglichen Gebiet haben. Wir definieren folgende Mengen:

(1o1) $$B^- = \{ Z_1, Z_1', Z_3, Z_3' \mid -2\pi+\varepsilon < \text{arc}-Z_1Z_1' - \text{arc}-Z_3Z_3' <$$

$$< 2\pi-\varepsilon,\ 11',\ 33' \text{ liegen auf derselben Seite einer Geraden} \}$$

(1o2) $$B^+ = \{ Z_1, Z_1', Z_3, Z_3' \mid -2\pi+\varepsilon < \text{arc}-Z_1Z_1' + \text{arc}-Z_3Z_3' <$$

$$< 2\pi-\varepsilon,\ 11',\ 33' \text{ liegen auf derselben Seite einer Geraden} \}$$

(1o3) $A^{\varepsilon} = \{ Z_1, Z_1', Z_3, Z_3' \mid -2\pi+\varepsilon < \arg -Z_1 Z_1' - \arg -Z_3 Z_3' < 2\pi-\varepsilon \}$

In den Gleichungen (1o1) - (1o3) soll $\arg Z \in (-\pi, \pi)$ gelten.

Durch B^+ und B^- erhält man eine Aufteilung von $C_1 - H(B_1^{\varepsilon})$ in zwei Mengen. Aus Hilfssatz 8 folgt nämlich:

(1o4) $$H(B_1^{\varepsilon}) = B^- \cap B^+ \cap C_1$$

Außerdem gilt nach Gleichung (1oo):

(1o5) $$Q_{13}^{\varepsilon} = B^- \cap B^+$$

Satz 3 besagt, daß wir in $C^4 - A^{\varepsilon}$ mit den hier benutzten Mitteln keine Beschränktheitsaussage machen können.

Satz 3

Es gilt:

(1o6) $$H(B^- \cup Q_{12}^{\varepsilon} \cup Q_{23}^{\varepsilon}) \subset A^{\varepsilon}$$

Folgerungen aus Satz 3:

1) Nach Gleichung (1o5) gilt:

(1o7) $$H(Q_{13}^{\varepsilon} \cup Q_{12}^{\varepsilon} \cup Q_{23}^{\varepsilon}) \subset A^{\varepsilon}$$

Man kann also nicht durch Grenzübergänge innerhalb des Be-

schränktheitsgebietes die in Gleichung (7) definierten reellen Punkte erreichen.

2) Es gilt:

$$H(B^- \cup Q_{12}^{\varepsilon} \cup Q_{23}^{\varepsilon}) \cap C_1 \subset A^{\varepsilon} \cap C_1 = B^- \cap C_1$$

Daraus folgt:

$$H(B^- \cup Q_{12}^{\varepsilon} \cup Q_{23}^{\varepsilon}) \cap C_1 = B^- \cap C_1 \tag{1o8}$$

Gleichung (1o8) besagt, daß diejenigen Beschränktheitspunkte, welche für die Konsistenz des Beschränktheitsgebietes mit der Positivität der Wightman-Funktionen entscheidend sind, durch Hinzunahme der Mengen B_r^{ε} ungeändert bleiben. Es ist also gezeigt, daß das in Kapitel II,5 betrachtete Verfahren zur Vergrößerung des Beschränktheitsgebietes nicht weiterführt.

Beweis von Satz 3

Aufgrund von Gleichung (1o3) können wir uns von der Menge A^{ε} folgendes anschauliche Bild machen:

Es gilt $11', 33' \notin A^{\varepsilon}$ für:

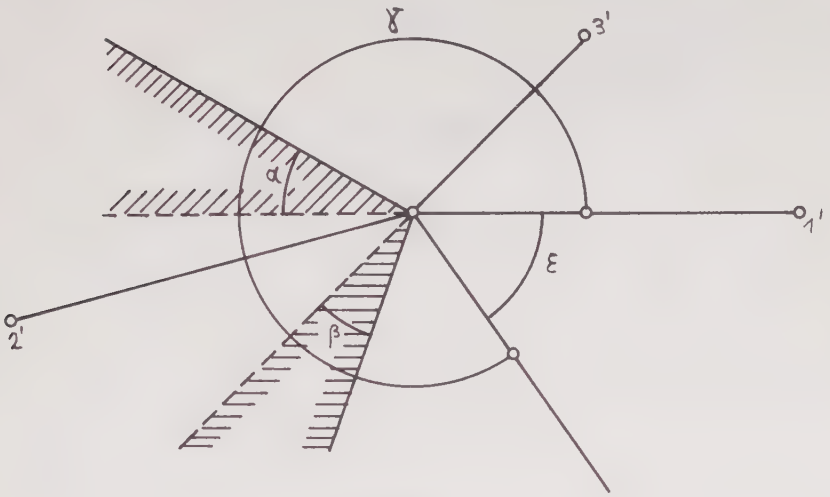
$$|\pi - |\sphericalangle 11'|| + |\pi - |\sphericalangle 33'|| \leq \varepsilon \tag{1o9}$$

$\sphericalangle 11'$ und $\sphericalangle 33'$ haben verschiedene Vorzeichen.
In Gleichung (1o9) soll $\sphericalangle \gamma\gamma' \in (-\pi, \pi)$ gelten.

Nach [16] (S. 192) ist folgende Gleichung für den Beweis von Gleichung (1o6) hinreichend:

$$B^{-} \cup Q_{12}^{\varepsilon} \cup Q_{23}^{\varepsilon} \subset A^{\varepsilon} \tag{11o}$$

Um Gleichung (11o) einzusehen, betrachten wir Figur 1o.

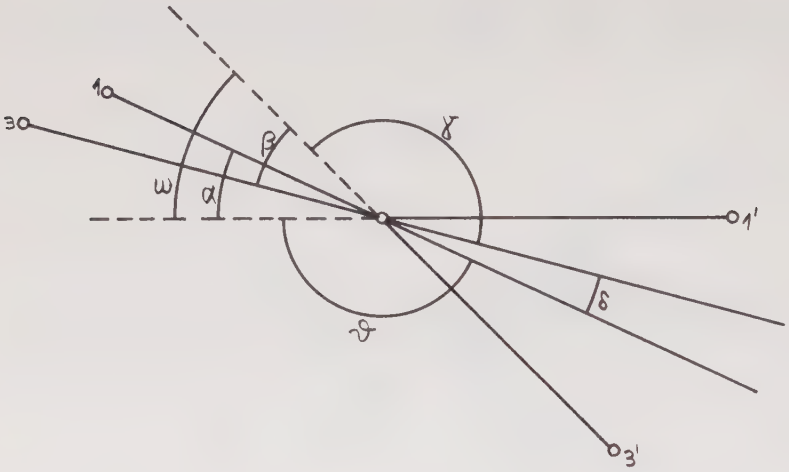


Figur 1o

In Figur 1o sind die schraffierten Gebiete α und β die von A^{ε} ausgeschlossenen Bereiche für 1 bzw. 3. Von nun an mögen 1 und 3 in den ausgeschlossenen Bereichen liegen. Zu zeigen ist, daß diese Punkte nicht in Q_{23}^{ε} oder Q_{12}^{ε} liegen. Variiert 3' in dem Bereich γ, so liegen weder 11',22' noch 33',22' auf einer Seite einer Geraden.

Es braucht nur noch der Fall betrachtet zu werden, daß 3'

in dem Bereich $\mathfrak{E}$ liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß 1 und 3 auf den Grenzen der ausgeschlossenen Bereiche liegen. Diese Situation ist in Figur 11 dargestellt:



Figur 11

ω und δ sind die Bereiche, in welchen 2' bzw. 2 liegen, wenn $|1|, |3|, |1'|, |3'|$ variabel sind.
γ und ϑ sind die minimalen Werte von $|\sphericalangle 22'|$ für den Fall, daß 11',22' bzw. 33',22' auf einer Seite einer Geraden liegen.

Es folgt:

(111) $\qquad \pi - \gamma = \beta \qquad\qquad \pi - \vartheta = \alpha$

Also gilt nach Gleichung (1o9):

(112) $\alpha + (\pi - \gamma) = \varepsilon \qquad \beta + (\pi - \vartheta) = \varepsilon$

Die Gleichungen (1oo), (111) und (112) zeigen, daß keine Punkte von $\mathfrak{Q}_{12}^{\varepsilon}$ oder $\mathfrak{Q}_{23}^{\varepsilon}$ ausgeschlossen werden. Es folgt also Gleichung (11o) und damit die Behauptung von Satz 3.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche Diskussionen danke ich Herrn Prof. Dr. H.J. Borchers.

Den Herren M. Schmidt und J. Yngvarson danke ich für Literaturhinweise.

IV Literaturverzeichnis

1) G.KÄLLEN, A. WIGHTMAN: Matematisk Fysiske Skrifter 1,Nr. 6 (1958)

2) D.RUELLE: Helv. Phys. Acta 34, (1961) , 581

3) D.RUELLE: Thesis Brüssel (1961)

4) A.C.MANOHARAN: Lecture Notes, Brandais (1968)

5) H.ARAKI,K.HEPP,D.RUELLE: Helv. Phys. Acta 35, (1962) , 164

6) H.J.BORCHERS: Nuovo Cim. 33, (1964) , 1600

7) I.HERBST: Commun. Math. Phys. 1, (1972) , 235

8) H.J.BORCHERS: Commun. Math. Phys. 1, (1965) , 49

9) H.J.BORCHERS: Nuovo cim. 24, (1962) , 214

10) R.F.STREATER,A.WIGHTMAN: TCP, Spin and Statistics and all that, Benjamin (1964)

11) A.UHLMANN: Ann. Phys. 13, (1961)

12) L.SCHWARTZ: Theorie des Distributions Hermann, Paris (1966)

13) R.JOST: Lecture Notes, Neapel (1961)

14) A.WIGHTMAN: Lecture Notes, Les Houches (1960)

15) V.S.VLADIMIROV: Methods of the Theory of Functions of several complex Variables MIT Press (1966)

16) B.A.FUKS: Analytic Functions of several complex Variables Rhode Island (1963)

17) F.J.DYSON: Phys. Rev. 110, (1958) , 579

18) F.NORGUET: Bull. Soc. Math. de France
82, (1954) , 137

Jürgen Steppeler

1944 geb. in Fredeburg Kreis Meschede

1950-1964 Schulbesuch in Meschede, Essen und Duisburg

1964 Abitur am Leibniz-Gymnasium in Duisburg

1964-1968 Studium der Physik in Göttingen

1968 Diplomprüfung

Thema der Diplomarbeit:

" Zur Bestimmung der Sprungtemperatur sauberer supraleitender Doppelschichten"

Betreuer der Diplomarbeit:

Prof. Dr. G. Lüders

1968-1973 Promotion auf dem Gebiet der Quantenfeldtheorie bei Prof. Dr. H.J.Borchers

1973 Anmeldung zur Promotionsprüfung